

# La fonction $y(x)$ et l'équation $z^x = x$

Par Pierre GERMAIN-LACOUR \*

## Résumé

A l'exception de documents que l'auteur a déjà effectués il semble que la fonction  $y(x)$  définie dans cet article est actuellement presque inconnue et que son utilisation est totalement inconnue jusqu'à maintenant.

## Introduction

Soit  $y(x)$  la fonction ayant la propriété suivante :

$$\forall x > x_{\min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{(1/e)} \approx 0.69220062, \quad y(x)^{y(x)} = x$$

On veut démontrer que :  $\forall m^m > x_{\min}, \quad y(m^m) = m$

Soit :  $v = m^m \Rightarrow m^m = v = y(v)^{y(v)}$

Pour  $x > 1/e \approx 0.36787944$  la fonction  $f(x) = x^x$  est croissante.

Si :  $y(v) > m \Rightarrow y(v)^{y(v)} > m^m = v$  : c'est impossible.

Si :  $y(v) < m \Rightarrow y(v)^{y(v)} < m^m = v$  : c'est impossible.

Donc finalement :  $y(v) = y(m^m) = m$

C'est à dire que :  $b = y(a)$  avec  $b > 1/e$  est équivalent à :  $a = b^b$

La relation  $y(m^m) = m$  montre que les fonctions  $y(x)$  et  $f(x) = x^x$  sont inverses l'une de l'autre,  $\forall x : f(y(x)) = x$  et  $y(f(x)) = x$

## Utilisation de la fonction $y(x)$

La fonction  $y(x)$  possède quelques valeurs évidentes : l'équation  $y(m^m) = m$  permet de noter que  $y(1) = 1$ ,  $y(4) = 2$ ,  $y(27) = 3$ ,  $y(256) = 4$ , etc. Mais il faut noter que la fonction  $y(x)$  qui peut être exprimée avec la fonction  $W(x)$  de Lambert ne peut pas être exprimée à l'aide des fonctions élémentaires.

Soit  $a = y(a)^{y(a)} \Rightarrow$  avec  $a = 1/z$  :  $a = 1/z = y(a)^{y(a)} = y(1/z)^{y(1/z)}$

$$\Rightarrow z = 1/(y(1/z)^{y(1/z)}) = (1/y(1/z))^{y(1/z)}$$

Soit  $x = 1/y(1/z) \Rightarrow z = (1/y(1/z))^{y(1/z)} = x^{y(1/z)} = x^{1/x}$

$$\Rightarrow z^x = x = 1/y(1/z)$$

Pour  $0 < z < e^{(1/e)} \approx 1.44466786$  on a :  $1/z > x_{\min} = \left(\frac{1}{e}\right)^{(1/e)}$  et l'équation  $z^x = x$

admet la solution :  $x = 1/y(1/z)$ . Exemple pour  $z = \sqrt{2}$  on a :  $z = 2^{(1/2)}$

$$\Rightarrow 1/z = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1/2)} \Rightarrow y(1/z) = 1/2 \Rightarrow x = 1/y(1/z) = 2 = (\sqrt{2})^2 = z^2$$

Pour  $0 < x < 1/e$  la fonction  $f(x) = x^x$  est décroissante de 1 à  $\left(\frac{1}{e}\right)^{(1/e)}$ .

Dans cet intervalle sa fonction inverse  $y_0(x)$  est décroissante de  $1/e$  à 0. Il en résulte que pour  $1 < z < e^{(1/e)}$  l'équation  $z^x = x$  admet une deuxième solution  $x_0 = 1/y_0(1/z)$ . Exemple pour  $z = \sqrt{2}$  l'équation a 2 solutions :  $x = 1/y(1/z) = 2$

$$\text{et : } 1/z = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{(1/4)} \Rightarrow y_0(1/z) = 1/4 \Rightarrow x_0 = 1/y_0(1/z) = 4 = (\sqrt{2})^4 = z^4$$

## Relations entre $y(x)$ et $W(x)$

La fonction de Lambert  $W(x)$  est la fonction inverse de  $g(x) = x \cdot e^x$ . Cette fonction  $W(x)$  est connue depuis le 18<sup>e</sup> siècle et son utilisation a fait l'objet de très nombreuses publications : voir [1].

Soit temporairement :  $y = f(x) = x^x \Rightarrow \ln(y) = x \cdot \ln(x)$

$\Rightarrow$  en fonction inverse :  $\ln(x) = y \cdot \ln(y) = (e^{\ln(y)}) \cdot \ln(y)$

Soient  $w = \ln(y)$  et  $z = \ln(x)$

$\ln(x) = z = y \cdot \ln(y) = \ln(y) \cdot (e^{\ln(y)}) = w \cdot e^w \Rightarrow w = W(z) \Rightarrow \ln(y) = w = W(\ln(x))$   
 $\Rightarrow y = \ln(x) / \ln(y) = \ln(x) / W(\ln(x)) \Rightarrow y(x) = \ln(x) / W(\ln(x)) \quad (1)$

$y = e^w = e^{W(z)} = e^{W(\ln(x))} \Rightarrow y(x) = e^{W(\ln(x))} \quad (2)$

Soit  $x = e^a \Rightarrow a = \ln(x) \Rightarrow W(a) = W(\ln(x)) = \ln(y(x)) = \ln(y(e^a))$   
 $\Rightarrow W(x) = \ln(y(e^x)) \quad (3)$

Soit  $b = e^x \Rightarrow y(b) = y(e^x) = \ln(b) / W(\ln(b)) = x / W(x) \Rightarrow W(x) = x / y(e^x) \quad (4)$

En abrégé :  $y(x) = \ln(x) / W(\ln(x)) = e^{W(\ln(x))}$  et  $W(x) = \ln(y(e^x)) = x / y(e^x)$

## Calcul de la fonction dérivée $y'(x)$

La fonction  $f(x) = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = (e^{x \cdot \ln(x)}) \cdot (x \cdot \ln(x))' = (x^x) \cdot (\ln(x) + x(1/x)) = (x^x) \cdot (1 + \ln(x))$

La fonction  $y(x)$  est l'inverse de la fonction  $f(x)$ . On dit aussi que  $f(x)$  et  $y(x)$  sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

$\Rightarrow y'(x) = 1/f'(y(x)) = 1/(y(x)^{y(x)} \cdot (1 + \ln(y(x)))) = 1/(x \cdot (1 + \ln(y(x))))$

## Programmation

A l'adresse Internet indiquée en référence [4] on peut télécharger : la fonction  $W(x)$  de Lambert, la fonction  $x(z)$  pour l'équation  $z^x = x$ , la fonction  $f(x) = x^x$ , la fonction  $y(x)$ , la fonction  $y_0(x)$ , et la fonction  $z(x)$  pour l'équation  $z^x = x$ . Les codes sources en langage C++ et les programmes exécutables sont utilisables sous Windows. Ils sont accompagnés de quelques commentaires et de figures qui montrent les courbes de ces fonctions et l'affichage de résultats déjà obtenus.

Dans la fonction programmée  $y(x)$  la valeur donnée de  $x$  et la valeur du résultat sont des variables C++ de type double. On utilise une méthode par dichotomie avec un encadrement  $a < y(x) < b$ . On calcule  $m = (a+b)/2$  et  $mm = m^m$ . Si  $mm > x$  on fait  $b = m$  et si  $mm < x$  on fait  $a = m$ . On arrête les itérations si  $a = b$  ou bien si on n'a pas pu améliorer  $a$  ou  $b$  : il faut éviter un bouclage. De cette manière on obtient la valeur de  $y(x)$  avec la précision des 14 ou 15 chiffres décimaux représentés dans un double. La durée de l'exécution de cette fonction programmée est en pratique relativement brève. En voici le code source.

```
// Calcul de y(x) = m <==> m^m = x
// xmin = (1/e)^(1/e) = 0.69220062755534636
// ymin = y(xmin) = 1/e = 0.36787944117144232 = amin
// bmax = 143.0 <==> xmax = bmax^bmax voisin de : 1.633e+308
double y(double x) {
    if(x < 0.69220062755534636) return 0.0;
    double a = 0.36787944117144232;
    double b = 143.0;
```

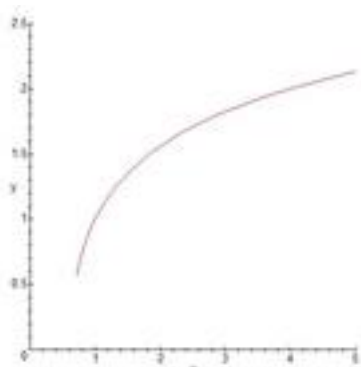
```

double m, mm, n=0.0;
do {
    m = (a+b)/2.0;
    if(m == n) break;
    mm = pow(m,m);
    if(mm > x) b = m;
    if(mm < x) a = m;
    n = m;
}while((abs(mm-x) > 0.0) && (b-a > 0.0));
return m;
}

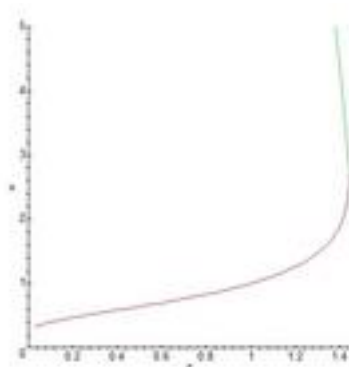
```

## Exemples

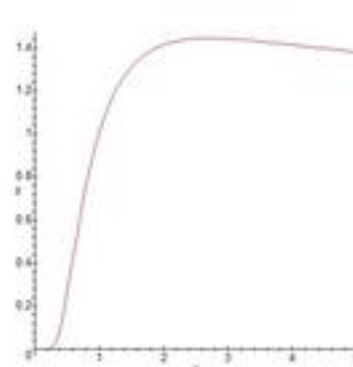
Voici des résultats pouvant servir à effectuer quelques vérifications.



fonction  $y(x)$



fonction  $x(z)$



fonction  $z(x)$

$y(0.69220062755534637) = 0.367879449473724$

$y(2) = 1.55961046946237$

$y(123) = 3.68758067135946$

$y(1234567) = 7.1369791400304$

pour  $z = 0.00390625$  :  $x = 0.25$  ( $z^x = 0.25$ )

pour  $z = 1.03938221217889$  :  $x = 1.04103081124775$  ( $z^x = x$ ) et  $x_0 = 125$

pour  $z = 1.41421356237309$  :  $x = 2$  ( $z^x = 2$ ) et  $x_0 = 4$

pour  $x = 0.1$  :  $z = 0.0000000001$  et  $z^x = 0.1$

pour  $x = 4$  :  $z = 1.41421356237309$  et  $z^x = 4$

pour  $x = 9$  :  $z = 1.27651800700924$  et  $z^x = 9$

## Conclusion

La fonction  $y(x)$  devrait être mieux connue. C'est son utilisation pour trouver une solution  $x$  de l'équation  $z^x = x$  avec  $0 < z < e^{(1/e)}$  qui en fait son intérêt principal. La fonction  $W(x)$  de Lambert est très bien connue depuis longtemps et elle est largement utilisée. La fonction  $y(x)$  et son utilisation seront maintenant mieux connues.

## Bibliographie

[1] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction\\_W\\_de\\_Lambert](https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_W_de_Lambert)

[2] Pierre Germain-Lacour : <https://github.com/pgl10/Ma-fonction>

[3] <https://codes-sources.commentcamarche.net/source/104200-l-equation-x-z-x>

[4] Pierre Germain-Lacour : <http://pgl10.chez.com/download/mon-projet.zip>

\* <http://pgl10.chez.com/mathematiques.html>