# Une nouvelle formule de nombres premiers


## Pierre Germain-Lacour [*]



***Résumé*** *: Après une célèbre formule d'Euler, une nouvelle formule de nombres premiers semble donner des résultats meilleurs que les autres formules analogues connues à ce jour.*


En 1772 le grand mathématicien Leonhard Euler, 1707-1783, publia une formule simple : $x^2+x+41$ qui fournit consécutivement 40 nombres premiers, tous positifs et tous différents, pour $x$ entier allant de 0 à 39. De plus, cette formule fournit 87 nombres premiers pour $x$ allant de 0 à 100. Ces résultats bien connus sont assez étonnants. Il est difficile, mais possible, d'obtenir une formule du même type donnant plus de nombres premiers dans les mêmes conditions. C'est pourquoi depuis cette date cela a suscité diverses recherches pour explorer les nombres premiers en vue d'établir des formules analogues ayant de meilleurs résultats.

La recherche effectuée ici concerne donc un polynôme $p(x)$, à une variable, de faible degré et à coefficients entiers qui fournit consécutivement $n$ nombres premiers, tous positifs et tous différents, pour $x$ entier allant de 0 à $n$-1. C'est un sujet qui est développé dans plusieurs livres d'arithmétique et Internet en a aussi beaucoup de références. En 2006 il y a eu un concours international en trois parties avec 16204 propositions de 118 participants venant de très nombreux pays différents dans lequel la première partie était précisément cette recherche. Les meilleurs résultats de ce concours, résumés ci-après pour chaque degré des polynômes, égalent ou dépassent les autres formules qui ont été publiées autrement.

| | | |
|---|---|---|
| - Euler | $p(x) = x^2+x+41$ | $n = 40$ |
| - W&M-1 | $p(x) = 42x^3+270x^2-26436x+250703$ | $n = 40$ |
| - K&T-1 | $p(x) = 45x^4-3416x^3+96738x^2-1212769x+5692031$ | $n = 42$ |
| - W&M-2 | $p(x) = x^5-61x^4+1339x^3-12523x^2+42398x+11699$ | $n = 41$ |
| - W&M-3 | $p(x) = x^6-119x^5+5850x^4-152072x^3+2205416x^2-16929506x+53822339$ | $n = 41$ |

W&M : Jaroslaw Wroblewski & Jean-Charles Meyrignac et K&T : Ivan Kazmenko & Vadim Trofimov

Ceci montre bien le haut niveau des résultats obtenu par la formule d'Euler. Voici maintenant la nouvelle formule que j'ai trouvée.

- en forme directe $p(x) = 108x^4-9777x^3+331416x^2-4984701x+28080037$
- en forme inversée $p(42-x) = 108x^4-8367x^3+242586x^2-3120375x+15045211$

Sous chacune de ses 2 formes cette formule fournit consécutivement 43 nombres premiers, tous positifs et tous différents, pour $x$ entier allant de 0 à 42. Il est difficile d'affirmer que cette formule n'a jamais été trouvée auparavant par un auteur qui ne l'aurait pas publiée ou qui aurait pu la publier sans que cela soit repris dans les documents connus spécifiques. Mais on peut déjà affirmer que cette nouvelle formule surclasse toutes les autres qui sont connues dans la même recherche. A la question : "est-il possible d'avoir une formule de ce type qui fournit 43 nombres premiers ?", la réponse est maintenant clairement : oui. Ce qui est particulièrement intéressant ici est de développer une méthode efficace qui permet d'obtenir une telle formule avec un ordinateur de table ordinaire et non pas avec un super-ordinateur très puissant.

Pour construire et utiliser ensuite un logiciel qui permet de trouver cette formule on associe à chaque nombre premier $p_n$ un domaine comprenant toutes les suites de 5 nombres premiers $\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ telles que : $11 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 = p_n$. Si pour une valeur $x_0$ on a $p(x_0)$=7 alors $p(x_0+7k)$, quelque soit $k$, aura pour valeur 7 ou un multiple de 7 et ceci arrivera 5 fois pour $x$ allant de 0 à 34. Cinq fois 7 est impossible : $p(x)$ est de degré 4. On y trouvera donc un ou plusieurs multiples de 7 et la formule ne sera pas retenue. Ceci montre qu'une formule intéressante ne peut pas donner 7 ni 2, 3 ou 5 de manière analogue. C'est pourquoi le domaine associé à chaque nombre premier commence avec $p_0$=11.

La méthode d'exploration comprend deux phases. La première, assez rapide, est un crible d'Ératosthène pour gérer les nombres premiers. La deuxième est très longue à exécuter. Successivement pour chaque nombre premier on explore son domaine : avec chacune de ses suites on forme directement le polynôme $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ qui vaut $p_0$ pour $x$=0, ... et $p_4$ pour $x$=4. Si $a_4$ est nul, ou bien si $a_4$ et $a_3$ ne sont pas entiers on passe à la suite suivante. Les relations : $p_0=a_0$, $p_1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4$ et $p_1-2p_2+p_3=2a_2+12a_3+50a_4$ montrent que si $a_3$ et $a_4$ sont entiers alors $a_0$, $a_1$ et $a_2$ le sont également. On regarde ensuite le nombre total de nombres premiers, y compris les 5 initiaux, obtenus consécutivement vers les $x$ positifs et négatifs. Si le score est intéressant, on effectue le changement d'origine et on archive la formule. Puis on continue d'explorer le domaine du nombre premier en cours avant de passer au suivant. L'un des avantages essentiels de cette méthode est qu'il est très facile de stopper l'exécution en notant le dernier domaine totalement exploré puis de continuer dans une autre session à partir du domaine suivant. Au bout de quelques jours, en parcourant le domaine de 7109 on retrouve la formule K&T-1. Ensuite, quelques semaines plus tard, en explorant le domaine de 19387 on obtient la nouvelle formule. J'ai aussi utilisé une méthode analogue avec les polynômes de degrés 3 et 5 mais sans dépasser $n$ = 40 jusqu'à maintenant.

La dimension du domaine associé aux nombres premiers successifs a une très forte croissance. Ainsi, pour explorer le domaine des nombres premiers voisins de 1000 il faut moins d'une seconde et pour celui des voisins de 25000 il faut environ un jour. Cependant, il est assez facile de continuer plus loin et plus vite l'exploration. Soit $pnp(x)$ le premier nombre premier suivant le nombre $x$, on peut aussi associer à chaque nombre premier $p_n$ plus grand que 25000 un domaine restreint défini par l'ensemble des suites telles que : $pnp(p_n-\delta) \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4 = p_n$ avec $\delta$ choisi à 2000, 4000 ou 8000, par exemples. Selon cette modification la durée de l'exploration de chaque domaine restreint successif sera limitée et même ira progressivement en diminuant puisque la densité des nombres premiers diminue vers les grands nombres. L'inconvénient principal est l'impasse faite à certaines suites qui ne seront pas explorées. En contrepartie, cela permet d'obtenir des résultats intéressants supplémentaires parmi lesquels on peut citer une recherche très rapide avec $\delta$ = 1500 seulement qui permet de trouver, dans le domaine restreint associé à 35863, la formule $p(x) = 23x^4-2204x^3+79053x^2-1257526x+7518767$ où $n$ = 40. On peut aussi citer la formule $p(x) = 8x^4-806x^3+29865x^2-482557x+2906153$ où $n$ = 41 : avec une recherche systématique en domaines associés complets il faudrait aller jusqu'à $p_n$ = 39089, ce qui est impossible en pratique, par contre en domaines restreints avec $\delta$ = 6100, ou plus, on peut la trouver assez facilement dans le domaine restreint du même $p_n$ = 39089.

Bien d'autres recherches ont été effectuées avec des règles différentes. Pour obtenir un meilleur résultat certains auteurs admettent aussi comme nombres premiers obtenus les nombres négatifs dont la valeur absolue est un nombre premier. Et d'autres admettent que le polynôme peut avoir des coefficients fractionnaires à condition que toutes ses valeurs soient entières quand la variable est entière. Ces deux règles, qui ne sont pas admises dans ma recherche, ont permis à François Dress et Bernard Landreau d'obtenir un record mondial où $n$ = 58. En plus, d'autres explorations ont été faites pour avoir le maximum de nombres premiers quand $x$ entier va de 0 à 100 ou de 0 à 1000.

Par contre, diverses modalités sans intérêt ne sont jamais, ou très rarement, admises. Par exemple, choisir 50 ou 60 nombres premiers et faire le polynôme d'interpolation à l'aide des polynômes de Lagrange. Il serait à coefficients fractionnaires et de degré très élevé. De même, faire $p(x)$ = 2 ou bien admettre 1 comme premier. C'est aussi le cas d'une formule symétrique comme celle d'Euler dans laquelle on fait $p(40-x) = x^2-79x+1601$ qui fournit consécutivement 80 nombres premiers pour $x$ allant de 0 à 79, mais ils sont tous obtenus 2 fois en raison de la symétrie de la formule. Il n'est pas non plus admis de reprendre une formule publiée et de la modifier en faisant un décalage d'origine ou bien en l'inversant en calculant $p(n-1-x)$ ou même en faisant un autre changement de variable.

Logiquement, on peut supposer qu'une exploration plus approfondie des nombres premiers permettra de trouver une autre formule encore meilleure que celle-ci. Les règles à respecter en sont très simples. La méthode de recherche peut toujours faire appel à un nouveau développement plus efficace.

## Références


[1] Leonhard Euler
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Euler.html
David Wells, Primes Numbers, 2005, Wiley, pages 77-79.

[2] Formules et nombres premiers
Paulo Ribenboim, The Little Book of Bigger Primes, 2004, Springer, pages 138 à 151.
Jean-Paul Delahaye, Merveilleux nombres premiers, 2012, Belin, pages 146 à 158.

[3] Ed Pegg Jr., Al Zimmermann's Programming Contests: Prime Generating Polynomials, 2006.
http://www.mathpuzzle.com/MAA/48-Prime%20Generating%20Polynomials/mathgames_07_17_06.html

[4] François Dress et Bernard Landreau
http://arxiv.org/pdf/1402.7312.pdf, 2012, 28 pages

[*] Courbevoie, samedi 8 mars 2014, http://pgl10.chez.com/mathematiques.html


## Annexe

Pour vérifier la primalité des 43 nombres premiers obtenus par cette nouvelle formule pour la variable entière allant de 0 à 42 on peut utiliser le programme, très simple, en langage C ci-après.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
int isprime(int n) {
   int i, m;
   if(n < 2) return 0;
   m = (int)sqrt((double)n)+1;
   for(i=2; i<m; i=i+1)
      if(n%i == 0) return 0;
   return 1;
}
int f(int x) {
   return (((108*x-9777)*x+331416)*x-4984701)*x+28080037;
}
void main() {
   int p, x;
   FILE* out;
   out = fopen("verif.txt", "w");
   for(x=0; x<76; x=x+1) {
      p = f(x);
      fprintf(out, "\n x = %3d   p(x) = %9d", x, p);
      if(isprime(p)) fprintf(out, "  premier");
   }
   fclose(out);
}
```

**Vérification de la formule :**

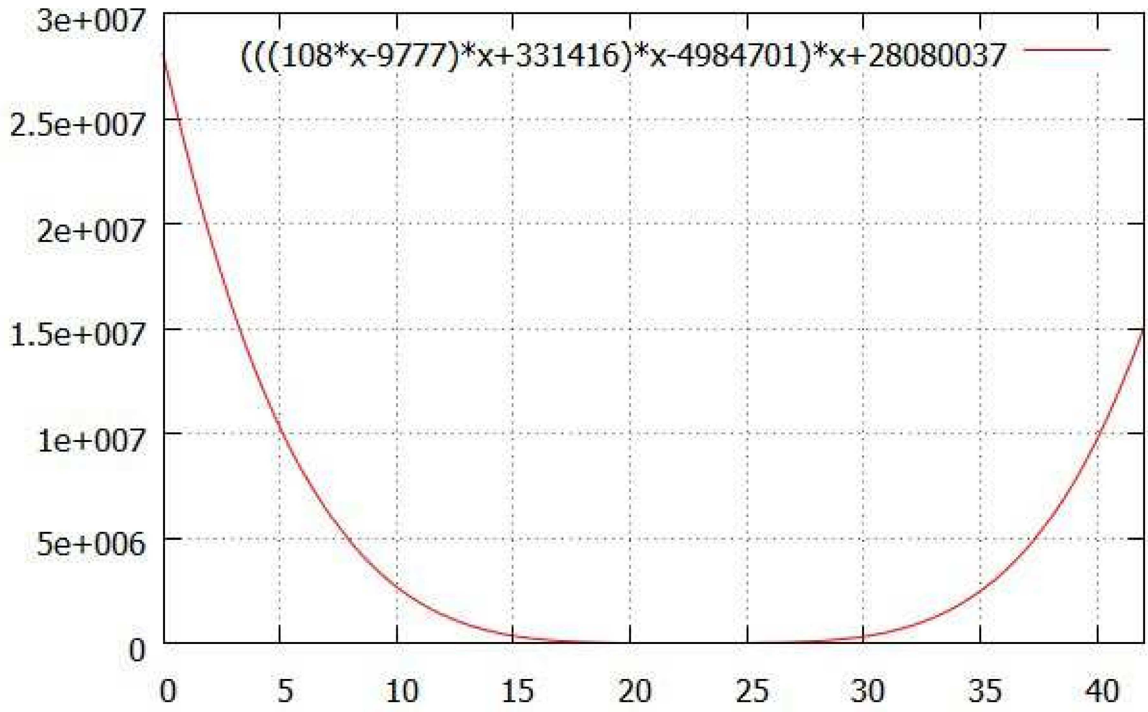
**$p(x) = 108x^4-9777x^3+331416x^2-4984701x+28080037$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x = 0 | p = | 28080037 | ( premier ) |
| 2 | x = 1 | p = | 23417083 | ( premier ) |
| 3 | x = 2 | p = | 19359811 | ( premier ) |
| 4 | x = 3 | p = | 15853447 | ( premier ) |
| 5 | x = 4 | p = | 12845809 | ( premier ) |
| 6 | x = 5 | p = | 10287307 | ( premier ) |
| 7 | x = 6 | p = | 8130943 | ( premier ) |
| 8 | x = 7 | p = | 6332311 | ( premier ) |
| 9 | x = 8 | p = | 4849597 | ( premier ) |
| 10 | x = 9 | p = | 3643579 | ( premier ) |
| 11 | x = 10 | p = | 2677627 | ( premier ) |
| 12 | x = 11 | p = | 1917703 | ( premier ) |
| 13 | x = 12 | p = | 1332361 | ( premier ) |
| 14 | x = 13 | p = | 892747 | ( premier ) |
| 15 | x = 14 | p = | 572599 | ( premier ) |
| 16 | x = 15 | p = | 348247 | ( premier ) |
| 17 | x = 16 | p = | 198613 | ( premier ) |
| 18 | x = 17 | p = | 105211 | ( premier ) |
| 19 | x = 18 | p = | 52147 | ( premier ) |
| 20 | x = 19 | p = | 26119 | ( premier ) |
| 21 | x = 20 | p = | 16417 | ( premier ) |
| 22 | x = 21 | p = | 14923 | ( premier ) |
| 23 | x = 22 | p = | 16111 | ( premier ) |
| 24 | x = 23 | p = | 17047 | ( premier ) |
| 25 | x = 24 | p = | 17389 | ( premier ) |
| 26 | x = 25 | p = | 19387 | ( premier ) |
| 27 | x = 26 | p = | 27883 | ( premier ) |
| 28 | x = 27 | p = | 50311 | ( premier ) |
| 29 | x = 28 | p = | 96697 | ( premier ) |
| 30 | x = 29 | p = | 179659 | ( premier ) |
| 31 | x = 30 | p = | 314407 | ( premier ) |
| 32 | x = 31 | p = | 518743 | ( premier ) |
| 33 | x = 32 | p = | 813061 | ( premier ) |
| 34 | x = 33 | p = | 1220347 | ( premier ) |
| 35 | x = 34 | p = | 1766179 | ( premier ) |
| 36 | x = 35 | p = | 2478727 | ( premier ) |
| 37 | x = 36 | p = | 3388753 | ( premier ) |
| 38 | x = 37 | p = | 4529611 | ( premier ) |
| 39 | x = 38 | p = | 5937247 | ( premier ) |
| 40 | x = 39 | p = | 7650199 | ( premier ) |
| 41 | x = 40 | p = | 9709597 | ( premier ) |
| 42 | x = 41 | p = | 12159163 | ( premier ) |
| 43 | x = 42 | p = | 15045211 | ( premier ) |
| | x = 43 | p = | 18416647 | |
| | x = 44 | p = | 22324969 | |
| | x = 45 | p = | 26824267 | |
| 44 | x = 46 | p = | 31971223 | ( premier ) |
| | x = 47 | p = | 37825111 | |
| | x = 48 | p = | 44447797 | |
| | x = 49 | p = | 51903739 | |
| | x = 50 | p = | 60259987 | |

**Vérification de la formule inversée :**

**p(x) = 108$x^4$-8367$x^3$+242586$x^2$-3120375$x$+15045211**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x = 0 | p = | 15045211 | ( premier ) |
| 2 | x = 1 | p = | 12159163 | ( premier ) |
| 3 | x = 2 | p = | 9709597 | ( premier ) |
| 4 | x = 3 | p = | 7650199 | ( premier ) |
| 5 | x = 4 | p = | 5937247 | ( premier ) |
| 6 | x = 5 | p = | 4529611 | ( premier ) |
| 7 | x = 6 | p = | 3388753 | ( premier ) |
| 8 | x = 7 | p = | 2478727 | ( premier ) |
| 9 | x = 8 | p = | 1766179 | ( premier ) |
| 10 | x = 9 | p = | 1220347 | ( premier ) |
| 11 | x = 10 | p = | 813061 | ( premier ) |
| 12 | x = 11 | p = | 518743 | ( premier ) |
| 13 | x = 12 | p = | 314407 | ( premier ) |
| 14 | x = 13 | p = | 179659 | ( premier ) |
| 15 | x = 14 | p = | 96697 | ( premier ) |
| 16 | x = 15 | p = | 50311 | ( premier ) |
| 17 | x = 16 | p = | 27883 | ( premier ) |
| 18 | x = 17 | p = | 19387 | ( premier ) |
| 19 | x = 18 | p = | 17389 | ( premier ) |
| 20 | x = 19 | p = | 17047 | ( premier ) |
| 21 | x = 20 | p = | 16111 | ( premier ) |
| 22 | x = 21 | p = | 14923 | ( premier ) |
| 23 | x = 22 | p = | 16417 | ( premier ) |
| 24 | x = 23 | p = | 26119 | ( premier ) |
| 25 | x = 24 | p = | 52147 | ( premier ) |
| 26 | x = 25 | p = | 105211 | ( premier ) |
| 27 | x = 26 | p = | 198613 | ( premier ) |
| 28 | x = 27 | p = | 348247 | ( premier ) |
| 29 | x = 28 | p = | 572599 | ( premier ) |
| 30 | x = 29 | p = | 892747 | ( premier ) |
| 31 | x = 30 | p = | 1332361 | ( premier ) |
| 32 | x = 31 | p = | 1917703 | ( premier ) |
| 33 | x = 32 | p = | 2677627 | ( premier ) |
| 34 | x = 33 | p = | 3643579 | ( premier ) |
| 35 | x = 34 | p = | 4849597 | ( premier ) |
| 36 | x = 35 | p = | 6332311 | ( premier ) |
| 37 | x = 36 | p = | 8130943 | ( premier ) |
| 38 | x = 37 | p = | 10287307 | ( premier ) |
| 39 | x = 38 | p = | 12845809 | ( premier ) |
| 40 | x = 39 | p = | 15853447 | ( premier ) |
| 41 | x = 40 | p = | 19359811 | ( premier ) |
| 42 | x = 41 | p = | 23417083 | ( premier ) |
| 43 | x = 42 | p = | 28080037 | ( premier ) |
| | x = 43 | p = | 33406039 | |
| | x = 44 | p = | 39455047 | |
| 44 | x = 45 | p = | 46289611 | ( premier ) |
| | x = 46 | p = | 53974873 | |
| | x = 47 | p = | 62578567 | |
| 45 | x = 48 | p = | 72171019 | ( premier ) |
| 46 | x = 49 | p = | 82825147 | ( premier ) |
| 47 | x = 50 | p = | 94616461 | ( premier ) |




**La formule p(x) = 108$x^4$-9777$x^3$+331416$x^2$-4984701$x$+28080037**

**a pour minimum : x = 20.8087540919 p(x) = 14867.60505246**

**et racines : p(x) = 108 [x-(a+ib)] [x-(a-ib)] [x-(c+id)] [x-(c-id)]**

**avec : a = 19.913791851077438**

**b = 2.0994312595999083**

**c = 25.350097037811452**

**d = 2.4096277878582435**