La fonction y(x) et l'équation x = z^x

Par Pierre GERMAIN-LACOUR

Résumé

A l'exception de documents que l'auteur a déjà effectués il semble que la fonction algébrique y(x) définie dans cet article est actuellement presque inconnue et que son utilisation est totalement inconnue jusqu'à maintenant.

Introduction

Soit y(x) la fonction algébrique ayant la propriété suivante : quelque soit x > xmin = (1/e)^(1/e) ≈ 0.69220062 : x = y(x)^y(x)

On veut démontrer que y(m^m) = m quelque soit m^m > xmin.

Soit : v = m^m => m^m = v = y(v)^y(v)
Pour x > 1/e ≈ 0.36787944 la fonction f(x) = x^x est croissante.
Si : y(v) > m => y(v)^y(v) > m^m = v : c'est impossible.
Si : y(v) < m => y(v)^y(v) < m^m = v : c'est impossible.
Donc finalement : y(v) = y(m^m) = m

C'est à dire que : b = y(a) avec b > 1/e est équivalent à : a = b^b

La relation y(m^m) = m montre que les fonctions y(x) et f(x) = x^x sont inverses l'une de l'autre, quelque soit x : f(y(x)) = x et y(f(x)) = x

Utilisation de la fonction y(x)

La fonction y(x) possède quelques valeurs évidentes : l'équation y(m^m) = m permet de noter que y(1) = 1, y(4) = 2, y(27) = 3, y(256) = 4, y(3125) = 5, etc. Mais il faut noter aussi que la fonction y(x) qui peut être exprimée avec la fonction W(x) de Lambert ne peut pas être exprimée à l'aide des fonctions algébriques usuelles.

Soit a = y(a)^y(a) => avec a = 1/z : a = 1/z = y(a)^y(a) = y(1/z)^y(1/z)
=> z = 1/(y(1/z)^y(1/z)) = (1/y(1/z))^y(1/z)

Soit x = 1/y(1/z) => z = (1/y(1/z))^y(1/z) = x^y(1/z) = x^(1/x)
=> z^x = x = 1/y(1/z)

Pour 0 < z < e^(1/e) ≈ 1.44466786 on a : 1/z > xmin = (1/e)^(1/e) et l'équation z^x = x admet la solution : x = 1/y(1/z). Exemple pour z = $\sqrt{2}$ on a : z = 2^(1/2) => 1/z = (1/2)^(1/2) => y(1/z) = 1/2 => x = 1/y(1/z) = 2 = ($\sqrt{2}$)^2

Pour 0 < x < 1/e la fonction f(x) = x^x est décroissante de 1 à (1/e)^(1/e). Dans cet intervalle sa fonction inverse y0(x) qui est définie pour (1/e)^(1/e) < x < 1 est décroissante de 1/e ≈ 0.36787944 à 0. Il en résulte que pour 1 < z < e^(1/e) l'équation x = z^x admet une deuxième solution x0 = 1/y0(1/z). Exemple pour z = $\sqrt{2}$ on a 2 solutions : x = 1/y(1/z) = 2 et x0 = 1/y0(1/z) = 4 (4 = ($\sqrt{2}$)^4).

Relations entre y(x) et W(x)

La fonction de Lambert W(x) est la fonction inverse de g(x) = x*e^x.
Cette fonction W(x) est connue depuis le 18e siècle et son utilisation a fait l'objet de très nombreuses publications : voir [1].

Soit temporairement : y = f(x) = x^x => ln(y) = x*ln(x)

=> en fonction inverse : ln(x) = y*ln(y) = (e^ln(y))*ln(y)
Soient w = ln(y) et z = ln(x)
ln(x) = z = y*ln(y) = ln(y)*(e^ln(y)) = w*e^w => w = W(z) => ln(y) = w = W(ln(x))
=> y = ln(x)/ln(y) = ln(x)/W(ln(x)) => y(x) = ln(x)/W(ln(x)) (1)

y = e^w = e^W(z) = e^W(ln(x)) => ln(y(x)) = W(ln(x)) => y(x) = e^W(ln(x)) (2)

Soit x = e^a => a = ln(x) => W(a) = W(ln(x)) = ln(y(x)) = ln(y(e^a))
=> W(x) = ln(y(e^x)) (3)

Soit b = e^x => y(b) = y(e^x) = ln(b)/W(ln(b)) = x/W(x) => W(x) = x/y(e^x) (4)

En abrégé : y(x) = ln(x)/W(ln(x)) = e^W(ln(x)) et W(x) = ln(y(e^x)) = x/y(e^x)

Calcul de la fonction dérivée y'(x)

La fonction f(x) = x^x = e^(x*ln(x))
=> f'(x) = (e^(x*ln(x)))*(x*ln(x))' = (x^x)*(ln(x)+x(1/x)) = (x^x)*(1+ln(x))
La fonction y(x) est l'inverse de la fonction f(x). On dit aussi que f(x) et y(x) sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
=> y'(x) = 1/f'(y(x)) = 1/((y(x)^y(x))*(1+ln(y(x)))) = 1/(x*(1+ln(y(x))))

Programmation

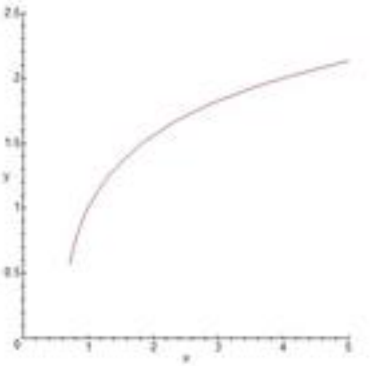
A l'adresse Internet indiquée en référence [4] on peut télécharger : la fonction W(x) de Lambert, la fonction x(z) pour l'équation z^x = x, la fonction f(x) = x^x, la fonction y(x), la fonction y0(x), et la fonction z(x) pour l'équation z^x = x. Les codes sources en langage C++ et les programmes exécutables sont utilisables sous Windows. Ils sont accompagnés de quelques commentaires et de figures qui montrent les courbes de ces fonctions et l'affichage de résultats déjà obtenus.

Dans la fonction programmée y(x) la valeur donnée de x et la valeur du résultat sont des variables C++ de type double. On utilise une méthode par dichotomie avec un encadrement a < y(x) < b. On calcule m = (a+b)/2 et mm = m^m. Si mm > x on fait b = m et si mm < x on fait a = m. On arrête les itérations si a = b ou bien si on n'a pas pu améliorer a ou b : il faut éviter un bouclage. De cette manière on obtient la valeur de y(x) avec la précision des 14 ou 15 chiffres décimaux représentés dans un double. La durée de l'exécution de cette fonction programmée est en pratique relativement brève. En voici le code source.

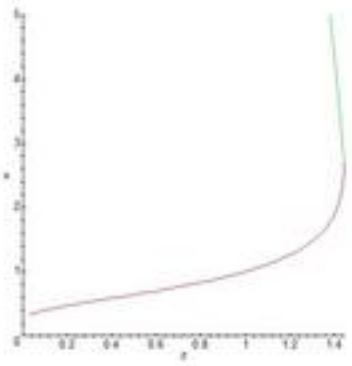
```
//  Calcul de y(x) = m  <==>  m^m = x
//  xmin = (1/e)^(1/e) = 0.69220062755534636
//  ymin = y(xmin) = 1/e = 0.36787944117144232 = amin
//  bmax = 143.0 <==> xmax = bmax^bmax voisin de : 1.633e+308
double y(double x) {
    if(x < 0.69220062755534636) return 0.0;
    double a = 0.36787944117144232;
    double b = 143.0;
    double m, mm, n=0.0;
    do {
        m = (a+b)/2.0;
        if(m == n) break;
        mm = pow(m,m);
        if(mm > x) b = m;
        if(mm < x) a = m;
        n = m;
    }while((abs(mm-x) > 0.0) && (b-a > 0.0));
    return m;
}
```

Exemples

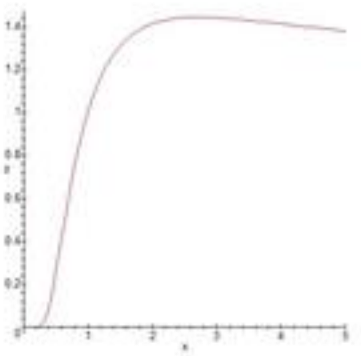
Voici des résultats pouvant servir à effectuer quelques vérifications.



fonction y(x)



fonction x(z)



fonction z(x)

y(0.69220062755534637) = 0.367879449473724
y(2) = 1.55961046946237
y(123) = 3.68758067135946
y(1234567) = 7.1369791400304

pour z = 0.00390625 : x = 0.25 et z^x = 0.25
pour z = 1.03938221217889 : x = 1.04103081124775 z^x = x et x0 = 125 z^x0 = x0
pour z = 1.41421356237309 : x = 2 et z^x = 2 plus x0 = 4 et z^x0 = 4

pour x = 0.1 : z = 0.0000000001 et z^x = 0.1
pour x = 4 : z = 1.41421356237309 et z^x = 4
pour x = 9 : z = 1.27651800700924 et z^x = 9

Conclusion

La fonction algébrique y(x) devrait être mieux connue. C'est son utilisation pour trouver une solution x de l'équation x = z^x avec 0 < z < e^(1/e) qui en fait son intérêt principal. La fonction W(x) de Lambert est très bien connue depuis longtemps et elle est largement utilisée. La fonction algébrique y(x) et son utilisation seront maintenant mieux connues.

Bibliographie

[1] https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_W_de_Lambert
[2] Pierre Germain-Lacour : https://github.com/pgl10/Ma-fonction
[3] https://codes-sources.commentcamarche.net/source/104200-l-equation-x-z-x
[4] Pierre Germain-Lacour : http://pgl10.chez.com/download/mon-projet.zip