L'intérêt principal de l'article publié dans Quadrature n° 134 daté de octobre-novembre-décembre 2024 était de pouvoir calculer la ou les solutions, si elles existent, de l'équation $z^x = x$

Solutions de **l'équation $z^x = x^p$** quelque soit $p > 0$.

Soit $f(x) = x^{px}$. Les fonctions $\Phi_0(x)$ et $\Phi(x)$ sont les fonctions réciproques de $f(x)$ pour $0 < x < \frac{1}{e}$ et pour $x > \frac{1}{e}$.

Pour chaque valeur du nombre positif p il existe un nombre n ayant la propriété suivante.
Pour $0 < z < 1$: l'équation $z^x = x^p$ a une solution.
Pour $1 < z < n$: l'équation $z^x = x^p$ a deux solutions.
Pour $z > n$: l'équation $z^x = x^p$ n'a aucune solution réelle.

On a : $n = (e^p)^{\frac{1}{e}}$.

Pour $p = 0.5$: $n \approx 1.20194337$ et pour $p = 2$: $n \approx 2.08706523$.
Pour $p = 0.5$ et $z = 1.1$: les deux solutions de l'équation $z^x = x^p$ sont : $x = 1.2751596577217708$ et $x_0 = 13.750075318060432$.
On a toujours : $x < e < x_0$ sauf pour $z = n$: $x = x_0 = e$.

Avec z et x donnés on a : $p = \dfrac{\ln(z^x)}{\ln(x)}$

Avec p et x donnés on a : $z = (x^p)^{\frac{1}{x}}$

Avec p et z donnés on a : $x = 1/\Phi(1/z)$ et $x_0 = 1/\Phi_0(1/z)$

Pour $(\frac{1}{e})^{\frac{p}{e}} < x < 1$: $\Phi_0(x)$ est décroissante de $\frac{1}{e}$ à 0.
Pour $x > (\frac{1}{e})^{\frac{p}{e}}$: $\Phi(x)$ est croissante de $\frac{1}{e}$ à ∞.

On a : $f(x) = x^{px} = e^{px\ln(x)}$ => $\ln(f(x)) = px\ln(x)$
En fonction réciproque : $\ln(x) = p\Phi(x)\ln(\Phi(x))$

Soient $w = \ln(\Phi(x))$ et $z = \ln(x)/p$
=> $\ln(x)/p = z = \Phi(x)\ln(\Phi(x)) = \ln(\Phi(x))e^{\ln(\Phi(x))} = we^{w}$
=> $w = W(z)$
=> $\ln(\Phi(x)) = w = W(z) = W(\ln(x)/p)$
=> $\Phi(x) = \ln(x)/(p\ln(\Phi(x))) = \ln(x)/(pW(\ln(x)/p))$

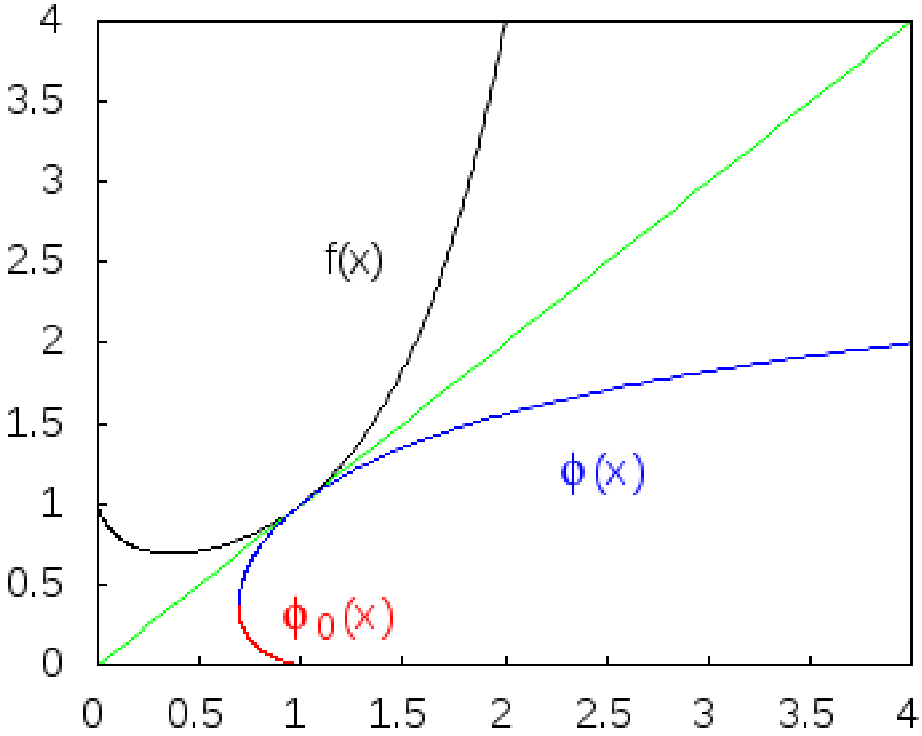
De même : $\Phi_0(x) = \ln(x)/(pW_{-1}(\ln(x)/p))$

On a : $\Phi(x)^{p\Phi(x)} = x$ => $\Phi(1/z)^{p\Phi(1/z)} = 1/z$
=> $z = 1/\Phi(1/z)^{p\Phi(1/z)} = (1/\Phi(1/z))^{p\Phi(1/z)}$
Soit $x = 1/\Phi(1/z)$ => $z = x^{p\Phi(1/z)} = x^{p/x}$ => $z^x = x^p$
Et de même : $x_0 = 1/\Phi_0(1/z)$ => $z^{x_0} = (x_0)^p$

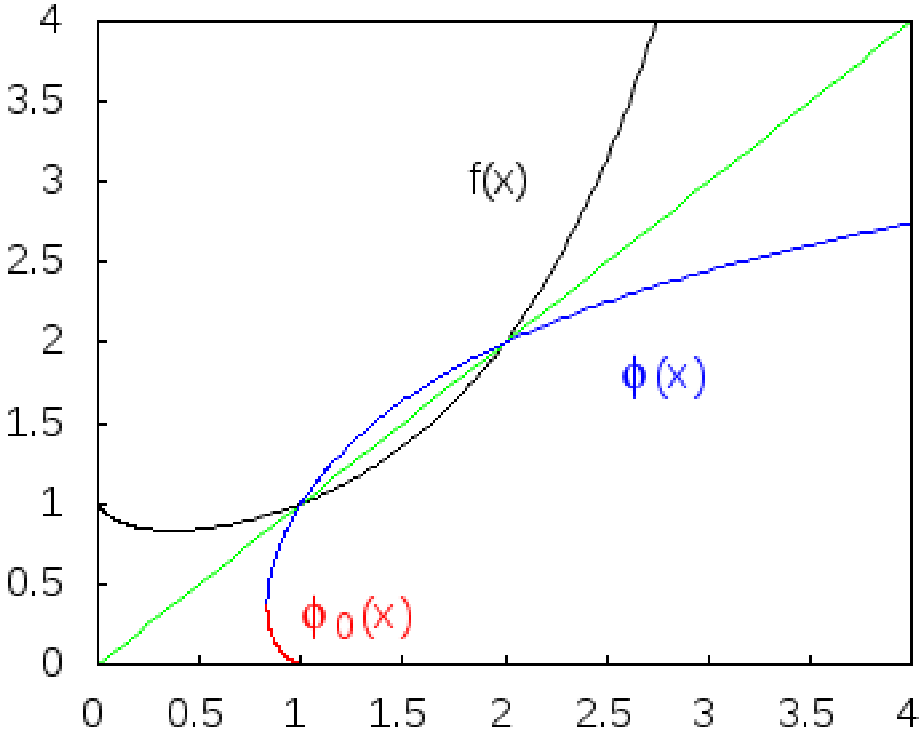
On peut calculer les solutions x et x_0 de l'équation : $z^x = x^p$ en allant à : http://www.dma.ufv.br/maxima/index.php avec les instructions Maxima suivantes où $y(x) = \Phi(x)$ et $y0(x) = \Phi_0(x)$.

```
[e : 2.718281828459045235 36];
[y(x) := log(x)/(p*lambert_w(log(x)/p))];
[y0(x) := log(x)/(p*generalized_lambert_w(-1,log(x)/p))];
[p : 2];
[n : (e^p)^(1/e)];
[z : 2.0];
[x : 1/y(1/z)];
cabs(z^x - x^p);
cabs(y(x)^(p*y(x)) - x);
[x0 : 1/y0(1/z)];
cabs(z^x0 - x0^p);
[x0 : 0.85];
cabs(y0(x0)^(p*y0(x0)) - x0);
```

On peut ensuite modifier : [p : 2]; ou [z : 2.0];.



Voici les fonctions f(x), $\Phi_0(x)$ et $\Phi(x)$ pour p = 1.



Voici les fonctions f(x), $\Phi_0(x)$ et $\Phi(x)$ pour p = 0.5.