

Solutions de l'équation $z^x = x^p$ quelque soit $p > 0$.

Soient $\Phi_0(x)$ et $\Phi(x)$ les fonctions réciproques de $f(x) = x^{px}$ pour $0 < x < \frac{1}{e}$ et pour $x > \frac{1}{e}$.

$\Phi_0(x)$ est décroissante de $\frac{1}{e}$ à 0 pour $(\frac{1}{e})^{\frac{p}{e}} < x < 1$.

$\Phi(x)$ est croissante de $\frac{1}{e}$ à ∞ pour $x > (\frac{1}{e})^{\frac{p}{e}}$.

$f(x) = x^{px} \iff x = \Phi(x)^{p\Phi(x)}$. Pour $x = 1/z$ on a :
 $1/z = \Phi(1/z)^{p\Phi(1/z)} \Rightarrow z = (1/\Phi(1/z))^{p\Phi(1/z)} = 1/\Phi(1/z)^{p\Phi(1/z)}$
Soit $x = 1/\Phi(1/z) \Rightarrow z = x^{p\Phi(1/z)} = x^{p/x} \Rightarrow z^x = x^p$
Et de même, soit : $x_0 = 1/\Phi_0(1/z) \Rightarrow z^{x_0} = (x_0)^p$

Pour $0 < z < 1$ l'équation $z^x = x^p$ a seulement la solution :
 $x = 1/\Phi(1/z)$.

Pour $1 < z < e^{\frac{p}{e}}$ l'équation $z^x = x^p$ a les deux solutions :
 $x = 1/\Phi(1/z)$ et $x_0 = 1/\Phi_0(1/z)$.

Pour $z > e^{\frac{p}{e}}$ l'équation $z^x = x^p$ n'a aucune solution réelle. En effet, le minimum de $f(x) = x^{px}$ est obtenu pour $x = x_{\min} = \frac{1}{e}$ et il vaut $f_{\min} = f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{p}{e}}$. Donc, si $z^x = x^p \Rightarrow z = x^{p/x} = 1/(1/x^{p/x}) \Rightarrow z = 1/((1/x)^{p/x}) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})} \Rightarrow z \leq \frac{1}{f_{\min}} = e^{\frac{p}{e}}$.